$$
\begin{aligned}
C \bullet X - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} &= \left(\sum_{i=1}^{m} y_i A_i + Z\right) \bullet X - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\
&= \sum_{i=1}^{m} (A_i \bullet X) y_i + Z \bullet X - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\
&= \sum_{i=1}^{m} b_i y_i + Z \bullet X - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\
&= Z \bullet X
\end{aligned}
$$

となる．行列 $X$ は半正定値なので $X = (X^{\frac{1}{2}})^2$ となる対称行列 $X^{\frac{1}{2}}$ が存在する．したがって

$$
\begin{aligned}
Z \bullet X &= \mathrm{Trace}(ZX) \\
&= \mathrm{Trace}(X^{\frac{1}{2}} Z X^{\frac{1}{2}}) \geq 0
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ただし最後の不等式は，$X^{\frac{1}{2}} Z X^{\frac{1}{2}}$ が半正定値行列であることによる． ■

**定理 5.12（双対定理）**

主問題 ($\mathrm{P_{SDP}}$) と双対問題 ($\mathrm{D_{SDP}}$) のそれぞれに，$X$ と $Z$ が正定値であるような実行可能解 $X, (\boldsymbol{y}, Z)$ が存在すると仮定する[7]．このとき，それぞれの問題に最適解が存在して，主問題 ($\mathrm{P_{SDP}}$) と双対問題 ($\mathrm{D_{SDP}}$) の最適値が等しくなる．

以上の定理より，双対ギャップが

$$
C \bullet X - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = X \bullet Z \geq 0
$$

であることがわかるので，半正定値計画問題の最適性条件は次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
A_i \bullet X = b_i \quad (i = 1, \cdots, m), \quad X \succeq O \quad &\text{（主問題の実行可能性）} \\
\sum_{i=1}^{m} y_i A_i + Z = C, \quad Z \succeq O \quad &\text{（双対問題の実行可能性）} \\
XZ = O \quad &\text{（相補性条件）}
\end{aligned}
$$

ここで $X \bullet Z = 0$ と $XZ = O$ が同値であることに注意されたい．

7)　$X$ と $Z$ が正定値であるとは，$X$ と $Z$ が半正定値制約 $X \succeq O, Z \succeq O$ に対する内点であることを意味する．この条件は Slater の制約想定に対応する．



## 5.4　制約付き最小化問題の数値解法

本節では制約付き最小化問題を解くための代表的な数値解法として，ペナルティ関数法，乗数法，逐次 2 次計画法，主双対内点法を紹介する．特に逐次 2 次計画法と主双対内点法が今日では有効であることが知られている．

### 5.4.1　ペナルティ関数法

本節で紹介する解法の基本的な考え方は，目的関数と制約関数を組み込んだ関数 (これを**拡張関数**という) を無制約最小化することである．こうした解法は Fiacco–McCormick(1968) が開発した **SUMT**(サムト：sequential unconstrained minimization technique) の出現以来，脚光を浴びるようになった．

(i)　内点ペナルティ関数法（バリア関数法）

まず最初に，不等式制約付き最小化問題を考えよう．

$$
\begin{cases}
\text{最 小 化} & f(\boldsymbol{x}) \\
\text{制約条件} & \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{0}
\end{cases}
$$

この問題に対する**内点ペナルティ関数法** (interior penalty function method) では，実行可能領域内での関数値が，領域の境界に近づくにつれて大きくなり，境界上では無限大になるように目的関数 $f(\boldsymbol{x})$ を拡張する．こうした拡張関数を作る際に目的関数に付加される関数を**バリア関数** (barrier function) といい，この拡張関数を**内点ペナルティ関数**という．次の形が代表的である．ただし，$\mu$ は正のバリア・パラメータ (barrier parameter) である．

$$
\begin{aligned}
P(\boldsymbol{x}; \mu) &= f(\boldsymbol{x}) - \mu \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{h_i(\boldsymbol{x})} \\
P(\boldsymbol{x}; \mu) &= f(\boldsymbol{x}) + \mu \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{h_i(\boldsymbol{x})^2} \\
P(\boldsymbol{x}; \mu) &= f(\boldsymbol{x}) - \mu \sum_{i=1}^{l} \log(-h_i(\boldsymbol{x})) \qquad (5.26)
\end{aligned}
$$

特に (5.26) で $\sum_{i=1}^{l} \log(-h_i(\boldsymbol{x}))$ を**ログバリア関数** (log–barrier function) という．

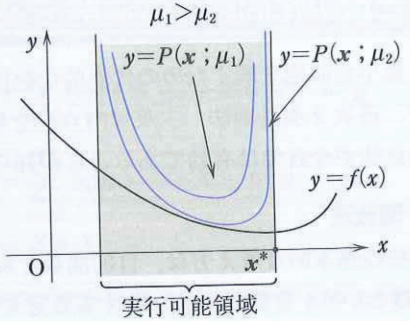


図 5.9 内点ペナルティ関数

**例 13** ログバリア関数

非負制約に対するログバリア関数を利用した内点ペナルティ関数は

$$P(\boldsymbol{x};\mu) = f(\boldsymbol{x}) - \mu \sum_{i=1}^{n} \log x_i$$

となる．特に線形計画問題の場合には

$$P(\boldsymbol{x};\mu) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \mu \sum_{i=1}^{n} \log x_i$$

になる．これらは線形計画問題や非線形計画問題に対する内点法で重要な役割を果たしている（5.4.4 参照）． □

内点ペナルティ関数法は，与えられた $\mu$ に対して逐次，無制約最小化問題を解きながら最終的に $\mu \to 0$ としていく解法である（図 5.9）．内点ペナルティ関数法は**バリア関数法** (barrier function method) または**内点法** (interior point method) とも呼ばれている．アルゴリズムをまとめれば以下の通りである．

**アルゴリズム 5.1**（内点ペナルティ関数法（不等式制約付き問題））

**step0** 初期点として実行可能領域の内点 $\boldsymbol{x}_0$ ($\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_0) < \boldsymbol{0}$) を選ぶ．初期のバリア・パラメータ $\mu_0 > 0$ を与える．$k = 0$ とする．

**step1** 内点ペナルティ関数 $P(\boldsymbol{x};\mu_k)$ を $\boldsymbol{x}$ について無制約最小化して，その最小解を $\boldsymbol{x}_k$ とする（第4章で紹介した無制約最適化法を利用することができる．その際，初期点として前回の近似解 $\boldsymbol{x}_{k-1}$ を用いることが考えられる）．



**step2** バリア・パラメータ $\mu_k$ が十分に小さければ $\boldsymbol{x}_k$ を解とみなして終了する．

**step3** バリア・パラメータを減少させて，$0 < \mu_{k+1} < \mu_k$ となる $\mu_{k+1}$ を選ぶ．

**step4** $k := k+1$ とおいて，step1 へいく．

上記のアルゴリズムで生成される点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ に対して，適当な仮定のもとで

$$\lim_{k\to\infty} P(\boldsymbol{x}_k;\mu_k) = f(\boldsymbol{x}^*), \quad \lim_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}_k) = f(\boldsymbol{x}^*)$$

が成り立つ．実際の問題では，最適解を求めることもさることながら，よりよい実行可能解を得ることが当面の目的である場合が多い．その意味では，内点ペナルティ関数法はいつ停止しても初期点よりもよい実行可能解が得られている，という利点をもっている．しかしその反面，制約条件を満たす初期点を必要とすることや，実行可能領域の境界に近づくにつれて無制約最適化法が数値的に不安定になること，などの問題点も抱えている．

(ii) **外点ペナルティ関数法**

次に一般の制約付き最小化問題を考えよう．

$$\begin{cases} \text{最 小 化} & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \le \boldsymbol{0} \end{cases}$$

この問題に対する**外点ペナルティ関数法** (exterior penalty function method) は，初期点として必ずしも内点を求めなくてもよいという利点がある．外点ペナルティ関数は $\boldsymbol{x}$ の全域で定義され，実行可能領域内では目的関数 $f(\boldsymbol{x})$ そのものとなり，実行可能領域の外側では境界から離れるに従って，関数値が無限大に発散するように構成されている．外点ペナルティ関数の例として

$$P(\boldsymbol{x};\rho) = f(\boldsymbol{x}) + \rho \left\{ \sum_{i=1}^{m} |g_i(\boldsymbol{x})|^{\alpha} + \sum_{j=1}^{l} (\max(0,\ h_j(\boldsymbol{x})))^{\beta} \right\}$$

がある．ここに，$\alpha, \beta \ge 1$ であり，$\rho$ は正の数で**ペナルティ・パラメータ** (penalty parameter) と呼ばれる．この方法では，与えられた $\rho$ に対して逐次，無制約最小化問題を解きながら最終的に $\rho \to \infty$ としていく（図 5.10）．

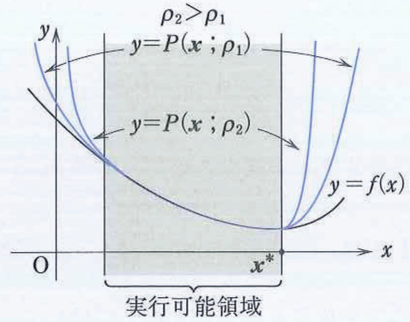


**図 5.10**　外点ペナルティ関数

(iii)　**混合ペナルティ関数法**

不等式制約に対しては内点ペナルティ関数の性質をもち，等式制約に対しては外点ペナルティ関数の性質をもつ**混合ペナルティ関数** (mixed penalty function) を作ることもできる．例えば，次の関数がある．

$$P(\boldsymbol{x};\mu,\rho) = f(\boldsymbol{x}) - \mu \sum_{i=1}^{l} \log(-h_i(\boldsymbol{x})) + \frac{\rho}{2} \sum_{j=1}^{m} g_j(\boldsymbol{x})^2$$

$$P(\boldsymbol{x};\mu,\rho) = f(\boldsymbol{x}) - \mu \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{h_i(\boldsymbol{x})} + \frac{\rho}{2} \sum_{j=1}^{m} g_j(\boldsymbol{x})^2$$

(iv)　**正確なペナルティ関数法**

上述のペナルティ法では，バリア・パラメータを $\mu \to 0$，ペナルティ・パラメータを $\rho \to \infty$ としながら無制約最小化問題を何回も解かなければならないので，反復が進行するにつれて解くべき無制約最小化問題は不安定になるという欠点をもっている．この問題点を解決するために，ペナルティ・パラメータを変更することなく，変換された無制約最小化問題を1回解くだけで，もとの問題の解が得られるような手法が考えられている．これは**正確なペナルティ関数法** (exact penalty function method) と呼ばれる解法である．正確なペナルティ関数として次の関数が知られている．この関数では等式制約に対して $l_1$ ノルムが使われているので，これを特に $l_1$ **型正確なペナルティ関数**という．



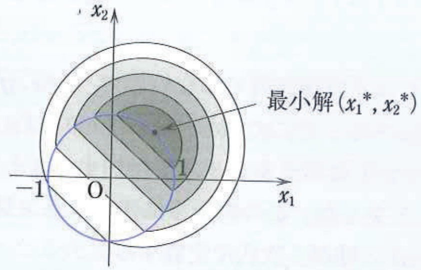


**図 5.11**　max 型関数の等高線

$$P(\boldsymbol{x};\rho) = f(\boldsymbol{x}) + \rho \left( \sum_{i=1}^{m} |g_i(\boldsymbol{x})| + \sum_{j=1}^{l} \max(0,\ h_j(\boldsymbol{x})) \right) \qquad (5.27)$$

この関数は，max 型関数と絶対値を含んでいるので，一般に微分可能ではない．図 5.11 には max 型関数

$$P(x_1, x_2;\rho) = -x_1 - x_2 + \max(0,\ x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

の等高線を示してある．青い円周上の点で微分不可になる．

以上で紹介したいろいろなペナルティ関数は，今日では制約付き問題の数値解法として直接，利用されるというよりも，後述する逐次2次計画法や内点法の直線探索で用いられる評価関数（**メリット関数** (merit function) という）として利用されることが多い．

### 5.4.2　乗数法

ペナルティ関数法が，ペナルティ・パラメータが無限大に近づくにつれて数値的に不安定になるという問題点をもっていることを 5.4.1 で述べたが，この欠点を回避する方法として**乗数法** (multiplier method) がある．

等式制約付き最小化問題

$$\begin{cases} \text{最 小 化} & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

について説明しよう．ラグランジュ関数を

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \qquad (5.28)$$

としたとき，最適性条件は