- 内生的な観測変数 $v_i$ には，1つ1つ誤差変数 $e_i$ がささる．
- 内生的な構成概念 $f_i$ には，1つ1つ誤差変数 $d_i$ がささる．
- 内生変数の分散は，外生変数の分散と係数の関数で表現（構造化）されるから，内生的な変数の分散は設定しない．
- 内生変数間，および内生変数と外生変数間の共分散は，外生変数の分散と係数の関数で表現（構造化）されるから，設定しない．
- モデルを構成するスカラーの方程式は，内生変数の数だけあり，内生変数とスカラーの方程式は1対1対応している．
- スカラーの方程式の右辺の項の数は，当該の内生変数にささった単方向の矢印の数と一致する．
- 推定される母数は3種類あり，それは分散と共分散と係数である．
- 係数の添字は，第1の添字 $i$ がささる変数の番号，第2の添字 $j$ がさす変数の番号である．
- モデル中の推定すべき母数の総数（これを「自由パラメータ数」という）は，観測変数の分散と共分散の和である $n_x(n_x+1)/2$ を超えてはならない．
- $f_i$ の各々に関して，そこから出ている単方向の矢印を任意に1つ選んで，その変数への係数の値を固定する．どれを選んでも，標準化した解は一意に定まるので任意に選んでよい．もし $f_i$ が外生変数であるならば，そうする代わりに $f_i$ の分散を固定することもできる．固定する値には1が用いられることが多い．

## 6.5 標準化解

係数の解釈を容易にするために，第4章で論じた測定方程式，第5章で論じた観測変数の構造方程式と同様に，全ての確率変数の分散が1であるようなSEM/LVを構成する．まず標準化されたSEM/LVを

$$t^* = A^* t^* + B u^* \tag{6.17}$$



と表現する．残差変数の分散は母数であるから

$$u^* = \begin{bmatrix} d^* \\ e^* \end{bmatrix} \tag{6.18}$$

の分散は容易に1に固定できる．構造変数ベクトルは

$$t^* = \begin{bmatrix} f^* \\ z \end{bmatrix} \tag{6.19}$$

である．観測変数 $z$ は分散が1であるから，第5章で論じた観測変数の構造方程式は容易に標準化解が求まった．また第4章で登場した外生変数である構成概念 $f_i$ も分散を1に固定することができたので，測定方程式も容易に標準化解を求めることができた．しかし，内生変数である構成概念の分散は，外生変数の分散と係数の関数で構造化されるから，容易には1に固定できない．そこで，標準化されていない解を求めてから，あらためて標準化解を求める．

まず，標準化前のSEM/LVは

$$t = At + u$$

であり，

$$t = Tu$$

であったから，構造変数ベクトルの共分散行列は

$$\Sigma_t = T \Sigma_u T'$$

と表現される．あらゆる確率ベクトルは，たとえば $z = (\mathrm{diag}(\Sigma))^{-1/2} v$ のように，当該確率ベクトルの標準偏差の逆数を対角要素にもつ対角行列を左からかけて標準化できるから

$$t = (\mathrm{diag}(\Sigma_t))^{1/2} t^*, \quad u = (\mathrm{diag}(\Sigma_u))^{1/2} u^*$$

が成り立つ．この関係を標準化前のSEM/LVの $t$ と $u$ に代入し，

$$(\mathrm{diag}(\Sigma_t))^{1/2} t^* = A (\mathrm{diag}(\Sigma_t))^{1/2} t^* + (\mathrm{diag}(\Sigma_u))^{1/2} u^* \tag{6.20}$$

を得る．この式は左から $(\mathrm{diag}(\Sigma_t))^{-1/2}$ をかけて

$$t^* = (\mathrm{diag}(\Sigma_t))^{-1/2} A (\mathrm{diag}(\Sigma_t))^{1/2} t^* + (\mathrm{diag}(\Sigma_t))^{-1/2} (\mathrm{diag}(\Sigma_u))^{1/2} u^*$$

$(\mathrm{diag}\,V)^{-1/2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{s_{nn}} \end{bmatrix}$



と変形できる．ここで

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{A}^* &= (\mathrm{diag}(\boldsymbol{\Sigma}_t))^{-1/2}\boldsymbol{A}(\mathrm{diag}(\boldsymbol{\Sigma}_t))^{1/2} \quad (6.21)\\ \boldsymbol{B} &= (\mathrm{diag}(\boldsymbol{\Sigma}_t))^{-1/2}(\mathrm{diag}(\boldsymbol{\Sigma}_u))^{1/2} \quad (6.22)\end{aligned}}$$

と置き換えれば，標準化されたＳＥＭ/ＬＶの基本式

$$\boldsymbol{t}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{t}^* + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}^* \tag{6.23}$$

を得る．このとき観測変数の相関構造は

$$\boldsymbol{\Sigma}_r = \boldsymbol{G}\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{B}\underset{\Sigma_{u^*}}{\underbrace{\boldsymbol{\Sigma}_{ru}}}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{T}^{*\prime}\boldsymbol{G}' \tag{6.24}$$

である．

$T^* = (I - A^*)^{-1}$

$\Sigma_{ru} = \Sigma_{u^*} = (\mathrm{diag}\,\Sigma_u)^{-1/2}\Sigma_u(\mathrm{diag}\,\Sigma_u)^{-1/2}$

解

## 6.6 分析数値例

本節では，これまで登場した分析モデルの実際の解を計算する．最初に，図6.2の2次因子分析モデルを分析する．モデルが識別されるように，幾つかの母数を固定する．まず $f_1$ は外生変数だから $\sigma^2_{f1}$, $\alpha_{a21}$, $\alpha_{a31}$, $\alpha_{a41}$ のうちどれか1つを固定する．$f_2$ は内生変数だから $\alpha_{b12}$, $\alpha_{b22}$ のどちらか1つを固定する．

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ＴＥＳＴ１ | 1.000 | | | | | |
| ＴＥＳＴ２ | 0.703 | 1.000 | | | | |
| ＴＥＳＴ３ | 0.432 | 0.469 | 1.000 | | | |
| ＴＥＳＴ４ | 0.424 | 0.461 | 0.738 | 1.000 | | |
| ＴＥＳＴ５ | 0.330 | 0.303 | 0.471 | 0.427 | 1.000 | |
| ＴＥＳＴ６ | 0.348 | 0.388 | 0.433 | 0.490 | 0.717 | 1.000 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 収入 | 1.000 | | | | | |
| 学歴 | 0.434 | 1.000 | | | | |
| 職業威信 | 0.508 | 0.459 | 1.000 | | | |
| 人脈 | 0.359 | 0.142 | 0.248 | 1.000 | | |
| 知名度 | 0.220 | 0.234 | 0.215 | 0.816 | 1.000 | |
| 社会参加 | 0.259 | 0.299 | 0.220 | 0.868 | 0.779 | 1.000 |





6つのテストの相関行列を分析すると，標準化された解

$$\begin{aligned} v_1 &= 0.809f_2 + 0.588e_1, & v_6 &= 0.874f_4 + 0.485e_6,\\ v_2 &= 0.869f_2 + 0.495e_2, & f_2 &= 0.694f_1 + 0.720d_2,\\ v_3 &= 0.855f_3 + 0.519e_3, & f_3 &= 0.894f_1 + 0.448d_3,\\ v_4 &= 0.863f_3 + 0.505e_4, & f_4 &= 0.698f_1 + 0.716d_4\\ v_5 &= 0.820f_4 + 0.572e_5, & & \end{aligned}$$

を得る．標準化解は図6.6のように，パス図に解を書き込むことによって意味を理解し易くなる．ここでは誤差の係数 $\beta_j$ も書き込まれているが，誤差の係数は省略されることもある．モデルを識別させるために固定する母数は，どれを固定しても標準化解は一致する．

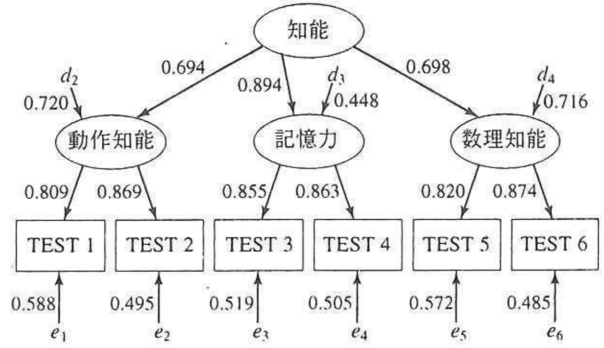


図 6.6: 2 次因子分析

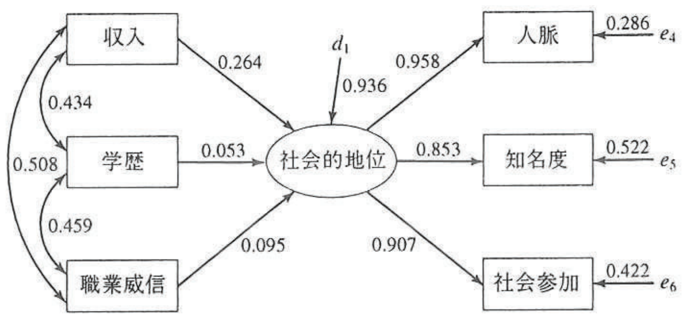


図 6.7: ＭＩＭＩＣモデルＢ