を与えると，式 (3.96) と (3.97) より $\hat{x}_0$ と P_0 が求まり，次に式 (3.97) の第一式と第三式より $\tilde{x}_1$ と M_1 が求まり，続いて式 (3.96) と (3.97) の第二式より $\hat{x}_1$ と P_1 が求まる．以下，順々に，測定値 $\boldsymbol{y}_k$ を得るごとに共分散行列 P_k を求めながら $\hat{x}_k$ を求めることができる (図 3.4 参照)．明らかに，$\hat{x}_k$ は過去 $k=0$ から現時点 k までの測定値 $\boldsymbol{y}_{[0,k]}$ のみから構成されている．こうして，式 (3.96) と (3.97) は信号 $\boldsymbol{x}_k$ の最適フィルターを形成しており，これをカルマン・フィルターという．

カルマン・フィルターの特長は，そのダイナミックスが差分式で表わされていることにある．現時点の推定量 $\hat{x}_k$ は，測定値 $\boldsymbol{y}_k$ を入力としながら，その一つ前の推定量 $\hat{x}_{k-1}$ と差分式の形で表わされ，分散行列 P_k も差分式によって表わされている．したがって，過

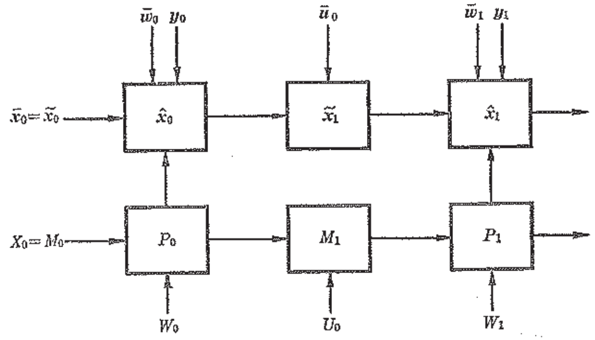

図 3.4 カルマン・フィルターの計算手順

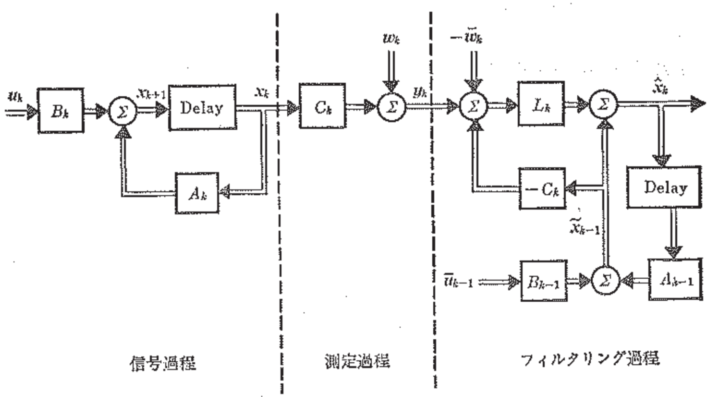

図 3.5 カルマン・フィルター
ここに $L_k=P_kC_k'W_k^{-1}$ とおいた．

去の測定データと計算データは，計算の一ステップごとに捨て去ることができ，計算のための記憶容量は比較的小さくてよいのである．

なお，式 (3.96) は次のようにも書き表わされることに注意する．

$$\hat{x}_k=(I-P_kC_k'W_k^{-1}C_k)(A_{k-1}\hat{x}_{k-1}+B_{k-1}\bar{u}_{k-1})+P_kC_k'W_k^{-1}(\boldsymbol{y}_k-\bar{\boldsymbol{w}}_k)$$

ここに I は $n\times n$ の単位行列である．

結局，カルマン・フィルターは図 3.5 のように構成されることがわかる．ここで左端の入力 $\boldsymbol{y}_k$ は図 3.3 の右端の出力 $\boldsymbol{y}_k$ に結合される．

3.3.4 カルマン・フィルターの構成 (一般の場合)

前節で仮定した $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{w}_k$ のガウス性が成立しないときでも，線形推定法則に基づいて誤差の二乗平均を最小にするという意味[1] で最適なカルマン・フィルターが構成できる．結論から先にいえば，式 (3.96) と (3.97) によって作られる $\hat{x}_k$ が上記の意味で最適な推定量となるのである．このことは，前節と類似の考察によって，$k=0$ の測定値 $\boldsymbol{y}_0$ が得られたときから始めて一歩一歩議論を進めていくと，確かめることがきる．

しかし，次章や後々の便宜を考えて，ここでは，一般的で見通しもよく，しかも厳密な考察に基づいて話を進めていこう．

ここではフィルタリングの問題を考えるのだから，信号 $\boldsymbol{x}_k$ の推定量は測定値 $\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_k$ の線形演算として式

$$\hat{x}_k=\boldsymbol{d}_k+\sum_{l=0}^{k}F_{kl}\boldsymbol{y}_l \tag{3.99}$$

で表わされる線形推定法則に従うものとする．ここに $\boldsymbol{d}_k$ は n 次元定数ベクトル，F_{kl} は $n\times m$ の定数行列である．問題は誤差ベクトル

$$\boldsymbol{e}_k=\hat{x}_k-\boldsymbol{x}_k \tag{3.100}$$

の分散行列が 2 次形式の意味で最小になるように $\boldsymbol{d}_k$ と $F_{k0}, F_{k1}, \cdots, F_{kk}$ を定めることである．

まず，$\hat{x}_k$ が不偏推定量でなければならないことからすぐに

$$\boldsymbol{d}_k=\bar{\boldsymbol{x}}_k-\sum_{l=0}^{k}F_{kl}(C_l\bar{\boldsymbol{x}}_l+\bar{\boldsymbol{w}}_l) \tag{3.101}$$

とならねばならないことがわかる．次に，$\boldsymbol{e}_k$ の分散行列を求めよう．任意の k と l に対し

1) 厳密には，定理 3.7 の直後で述べたように，誤差ベクトル $\boldsymbol{e}_k=\hat{x}_k-\boldsymbol{x}_k$ の分散行列を 2 次形式の意味で最小にすることとなる．

て $\boldsymbol{x}_l-\bar{\boldsymbol{x}}_l$ と $\boldsymbol{w}_k-\bar{\boldsymbol{w}}_k$ が無相関であることから，

$$
\begin{aligned}
E\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_k' &= E(\hat{\boldsymbol{x}}_k-\boldsymbol{x}_k)(\hat{\boldsymbol{x}}_k-\boldsymbol{x}_k)' \\
&= E\Big[(\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k)-\sum_{l=0}^{k}F_{kl}\{C_l(\boldsymbol{x}_l-\bar{\boldsymbol{x}}_l)+(\boldsymbol{w}_l-\bar{\boldsymbol{w}}_l)\}\Big]\cdot \\
&\qquad \Big[(\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k)-\sum_{l=0}^{k}F_{kl}\{C_l(\boldsymbol{x}_l-\bar{\boldsymbol{x}}_l)+(\boldsymbol{w}_l-\bar{\boldsymbol{w}}_l)\}\Big]' \\
&= X_k+\sum_{i=0}^{k}\Big(\sum_{j=0}^{k}F_{ki}C_iX_{ij}C_j'F_{kj}'+F_{ki}W_iF_{ki}'\Big) \\
&\quad -\sum_{i=0}^{k}(X_{ki}C_i'F_{ki}'+F_{ki}C_iX_{ik})
\end{aligned}
\tag{3.102}
$$

となる．ここに

$$
E(\boldsymbol{x}_i-\bar{\boldsymbol{x}}_i)(\boldsymbol{x}_k-\bar{\boldsymbol{x}}_k)'=X_{ik}, \qquad X_i=X_{ii} \tag{3.103}
$$

と定義した．ここで次の記法を導入しよう．

$$
\left.
\begin{aligned}
&F(k)=[F_{k0}F_{k1}\cdots F_{kk}] \\
&\boldsymbol{C}_k=\begin{bmatrix} C_0 & & 0 \\ & C_1 & \\ 0 & & \ddots \; C_k \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{W}_k=\begin{bmatrix} W_0 & & 0 \\ & W_1 & \\ 0 & & \ddots \; W_k \end{bmatrix} \\
&X(k)=\begin{bmatrix} X_{0k} \\ X_{1k} \\ \vdots \\ X_{kk} \end{bmatrix} \qquad X_k=\begin{bmatrix} X_{00} & X_{01} & \cdots & X_{0k} \\ X_{10} & X_{11} & \cdots & X_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_{k0} & X_{k1} & \cdots & X_{kk} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\right\}
\tag{3.104}
$$

念のため，これらの行列の次元を記しておく．

$$
\left.
\begin{aligned}
&F(k):n\times(k+1)m \\
&X(k):(k+1)n\times n \\
&\boldsymbol{W}_k:(k+1)m\times(k+1)m \\
&\boldsymbol{C}_k:(k+1)m\times(k+1)n \\
&\boldsymbol{X}_k:(k+1)n\times(k+1)n
\end{aligned}
\right\}
\tag{3.105}
$$

式 (3.102) は式 (3.104) の記法に基づいて次のように表わされる．

$$
\begin{aligned}
E\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_k' &= \boldsymbol{X}_k+F(k)\{\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{C}_k'+\boldsymbol{W}_k\}F'(k) \\
&\quad -F(k)\boldsymbol{C}_kX(k)-X'(k)\boldsymbol{C}_k'F'(k)
\end{aligned}
\tag{3.106}
$$

この式を式 (3.51) あるいは (3.52) と比較してみよう．その結果

$$
\begin{aligned}
E\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_k' &= [F(k)-X'(k)\boldsymbol{C}_k'\boldsymbol{Y}_k^{-1}]\boldsymbol{Y}_k[F(k)-X'(k)\boldsymbol{C}_k'\boldsymbol{Y}_k^{-1}]' \\
&\quad +\boldsymbol{X}_k-X'(k)\boldsymbol{C}_k'\boldsymbol{Y}_k^{-1}\boldsymbol{C}_kX(k)
\end{aligned}
\tag{3.107}
$$

と表わされることがわかる．ここに

$$
\boldsymbol{Y}_k=\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{C}_k'+\boldsymbol{W}_k \tag{3.108}
$$

とおいたが，これは明らかに測定値全体 $\boldsymbol{y}_{[0,k]}$ の分散行列を表わしていることに注意したい．こうして，2次形式の意味で誤差の分散行列を最小にする $F(k)$ は次のようになることが示された．

$$
\begin{aligned}
F(k) &= X'(k)\boldsymbol{C}_k'\boldsymbol{Y}_k^{-1} \\
&= X'(k)\boldsymbol{C}_k'[\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{C}_k'+\boldsymbol{W}_k]^{-1}
\end{aligned}
\tag{3.109}
$$

これより，信号 $\boldsymbol{x}_k$ の最小二乗推定量は

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{x}}_k &= F(k)\boldsymbol{y}_{[0,k]}+\boldsymbol{d}_k \\
&= \bar{\boldsymbol{x}}_k+F(k)\{\boldsymbol{y}_{[0,k]}-\bar{\boldsymbol{y}}_{[0,k]}\} \\
&= \bar{\boldsymbol{x}}_k+X'(k)\boldsymbol{C}_k'[\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{C}_k'+\boldsymbol{W}_k]^{-1}\{\boldsymbol{y}_{[0,k]}-\bar{\boldsymbol{y}}_{[0,k]}\}
\end{aligned}
\tag{3.110}
$$

と与えられる．かくして次のことが示されたことになる．

定理 3.9　信号 $\boldsymbol{x}_k$ の線形推定法則に基づくフィルタリング問題について，誤差 $\boldsymbol{e}_k=\hat{\boldsymbol{x}}_k-\boldsymbol{x}_k$ の分散行列に関する任意の2次形式を最小にする不偏な最小二乗推定量は式 (3.110) で構成される．ここに誤差の分散行列は

$$
\begin{aligned}
P_k &= E\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_k' \\
&= \boldsymbol{X}_k-X'(k)\boldsymbol{C}_k'[\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{C}_k'+\boldsymbol{W}_k]^{-1}\boldsymbol{C}_kX(k)
\end{aligned}
\tag{3.111}
$$

と与えられる．

こうして求まった最適フィルターは，残念ながら，漸化式の形になっていないので，計算に不便である．ところが，幸いなことに，少し面倒ではあるが注意深い行列演算を試みると，式 (3.110) と (3.111) は結局式 (3.96) と (3.97) の漸化式に帰着することが証明されるのである．

そのことを示すために，まず

$$
\left.
\begin{aligned}
&Y_k=C_kX_kC_k'+W_k \\
&Z(k)=\boldsymbol{C}_{k-1}X(k-1)A_{k-1}'C_k'
\end{aligned}
\right\}
\tag{3.112}
$$

とおこう．$j>i$ ならば，一般に式

$$
\begin{aligned}
X_{ij} &= E[\boldsymbol{x}_i-\bar{\boldsymbol{x}}_i][\boldsymbol{x}_j-\bar{\boldsymbol{x}}_j]' \\
&= E[\boldsymbol{x}_i-\bar{\boldsymbol{x}}_i][A_{j-1}(\boldsymbol{x}_{j-1}-\bar{\boldsymbol{x}}_{j-1})+B_{j-1}(\boldsymbol{u}_{j-1}-\bar{\boldsymbol{u}}_{j-1})]' \\
&= E[\boldsymbol{x}_i-\bar{\boldsymbol{x}}_i][\boldsymbol{x}_{j-1}-\bar{\boldsymbol{x}}_{j-1}]'A_{j-1}' \\
&= X_{i,j-1}A_{j-1}'
\end{aligned}
\tag{3.113}
$$

が成立することに注意すれば，行列 $\boldsymbol{Y}_k$ は

$$\boldsymbol{Y}_k=\begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_{k-1} & Z(k) \\ Z'(k) & Y_k \end{bmatrix} \tag{3.114}$$

と分解できることがわかる．ここで $\boldsymbol{Y}_k^{-1}$ を求めるため，$\boldsymbol{Y}_k$ の部分行列に対応させて

$$\boldsymbol{Y}_k^{-1}=\begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{Y}}_{k-1} & \bar{Z}(k) \\ \bar{Z}'(k) & \overline{Y}_k \end{bmatrix} \tag{3.115}$$

とおこう．このとき，問題 3.2 より，各部分行列は次のように表わされることがわかる．

$$\overline{Y}_k=(Y_k-Z'(k)\boldsymbol{Y}_{k-1}^{-1}Z(k))^{-1} \tag{3.116 a}$$

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{Y}}_{k-1}&=(\boldsymbol{Y}_{k-1}-Z(k)Y_k^{-1}Z'(k))^{-1}\\&=\boldsymbol{Y}_{k-1}^{-1}+\boldsymbol{Y}_{k-1}^{-1}Z(k)\overline{Y}_kZ'(k)\boldsymbol{Y}_{k-1}^{-1}\\&=\boldsymbol{Y}_{k-1}^{-1}-\bar{Z}(k)Z'(k)\boldsymbol{Y}_{k-1}^{-1}\end{aligned} \tag{3.116 b}$$

$$\bar{Z}(k)=-\boldsymbol{Y}_{k-1}^{-1}Z(k)\overline{Y}_k=-\overline{\boldsymbol{Y}}_{k-1}Z(k)Y_k^{-1} \tag{3.116 c}$$

ここで，式 (3.111) から

$$X'(k-1)\boldsymbol{C}_{k-1}'\boldsymbol{Y}_{k-1}^{-1}\boldsymbol{C}_{k-1}X(k-1)=X_{k-1}-P_{k-1} \tag{3.117}$$

と表わされることと，式 (3.79) に注目しながら，式 (3.112) を (3.116 a) に代入すれば，

$$\begin{aligned}\overline{Y}_k&=[Y_k-C_kA_{k-1}\{X'(k-1)\boldsymbol{C}_{k-1}'\boldsymbol{Y}_{k-1}^{-1}\boldsymbol{C}_{k-1}X(k-1)\}A_{k-1}'C_k']^{-1}\\&=[C_kX_kC_k'+W_k-C_kA_{k-1}\{X_{k-1}-P_{k-1}\}A_{k-1}'C_k']^{-1}\\&=[W_k+C_k(A_{k-1}P_{k-1}A_{k-1}'+B_{k-1}U_{k-1}B_{k-1}')C_k']^{-1}\end{aligned} \tag{3.118}$$

となる．そこで，簡単のために

$$M_k=A_{k-1}P_{k-1}A_{k-1}'+B_{k-1}U_{k-1}B_{k-1}' \tag{3.119}$$

とおくと，

$$\overline{Y}_k=(W_k+C_kM_kC_k')^{-1} \tag{3.120}$$

と表わされることがわかった．

次に

$$\begin{aligned}X'(k)\boldsymbol{C}_k'\boldsymbol{Y}_k^{-1}&=[A_{k-1}X'(k-1),\ X_k]\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{k-1}' & 0 \\ 0 & C_k' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{Y}}_{k-1} & \bar{Z}(k) \\ \bar{Z}'(k) & \overline{Y}_k \end{bmatrix}\\&=[A_{k-1}X'(k-1)\boldsymbol{C}_{k-1}'\overline{\boldsymbol{Y}}_{k-1}+X_kC_k'\bar{Z}'(k),\ A_{k-1}X'(k-1)\boldsymbol{C}_{k-1}'\bar{Z}(k)+X_kC_k'\overline{Y}_k]\end{aligned} \tag{3.121}$$

と表わされることに注目し，各部分行列を求めてみる．実際

$$\begin{aligned}&A_{k-1}X'(k-1)\boldsymbol{C}_{k-1}'\bar{Z}(k)+X_kC_k'\overline{Y}_k\\&=-A_{k-1}\{X'(k-1)\boldsymbol{C}_{k-1}'\boldsymbol{Y}_{k-1}^{-1}\boldsymbol{C}_{k-1}X(k-1)\}A_{k-1}'C_k'\overline{Y}_k+X_kC_k'\overline{Y}_k\\&=A_{k-1}\{P_{k-1}-X_{k-1}\}A_{k-1}'C_k'\overline{Y}_k+X_kC_k'\overline{Y}_k\\&=(A_{k-1}P_{k-1}A_{k-1}'-A_{k-1}X_{k-1}A_{k-1}'+X_k)C_k'\overline{Y}_k\\&=M_kC_k'\overline{Y}_k\\&=M_kC_k'(W_k+C_kM_kC_k')^{-1}\\&=(M_k^{-1}+C_k'W_k^{-1}C_k)^{-1}C_k'W_k^{-1}\end{aligned} \tag{3.122}$$

となる．ただし，最後の等式は演習問題 3.1 によった．もう一つの部分行列は，式 (3.116) に注意しながら，先程の結果 (3.122) を用いて，

$$\begin{aligned}&A_{k-1}X'(k-1)\boldsymbol{C}_{k-1}'\overline{\boldsymbol{Y}}_{k-1}+X_kC_k'\bar{Z}'(k)\\&=A_{k-1}X'(k-1)\boldsymbol{C}_{k-1}'[\boldsymbol{Y}_{k-1}^{-1}-\bar{Z}(k)Z'(k)\boldsymbol{Y}_{k-1}^{-1}]-X_kC_k'\overline{Y}_kZ'(k)\boldsymbol{Y}_{k-1}^{-1}\\&=A_{k-1}X'(k-1)\boldsymbol{C}_{k-1}'\boldsymbol{Y}_{k-1}^{-1}-[A_{k-1}X'(k-1)\boldsymbol{C}_{k-1}'\bar{Z}(k)+X_kC_k'\overline{Y}_k]Z'(k)\boldsymbol{Y}_{k-1}^{-1}\\&=A_{k-1}X'(k-1)\boldsymbol{C}_{k-1}'\boldsymbol{Y}_{k-1}^{-1}-(M_k^{-1}+C_k'W_k^{-1}C_k)^{-1}C_k'W_k^{-1}Z'(k)\boldsymbol{Y}_{k-1}^{-1}\end{aligned} \tag{3.123}$$

と表わされる．

さて，以上で準備が完了したので，誤差 e_k の分散行列 P_k の漸化式を導こう．式 (3.121) から (3.123) までの結果を式 (3.111) に代入すれば，

$$\begin{aligned}P_k&=X_k-[\{A_{k-1}X'(k-1)\boldsymbol{C}_{k-1}'\overline{\boldsymbol{Y}}_{k-1}+X_kC_k'\bar{Z}'(k)\}\boldsymbol{C}_{k-1}X(k-1)A_{k-1}'\\&\quad+\{A_{k-1}X'(k-1)\boldsymbol{C}_{k-1}'\bar{Z}(k)+X_kC_k'\overline{Y}_k\}C_kX_k]\\&=X_k-[A_{k-1}X'(k-1)\boldsymbol{C}_{k-1}'\boldsymbol{Y}_{k-1}^{-1}\boldsymbol{C}_{k-1}X(k-1)A_{k-1}'\\&\quad-(M_k^{-1}+C_k'W_k^{-1}C_k)^{-1}C_k'W_k^{-1}Z'(k)\boldsymbol{Y}_{k-1}^{-1}\boldsymbol{C}_{k-1}X(k-1)A_{k-1}'\\&\quad+(M_k^{-1}+C_k'W_k^{-1}C_k)^{-1}C_k'W_k^{-1}C_kX_k]\\&=X_k-A_{k-1}(X_{k-1}-P_{k-1})A_{k-1}'\\&\quad+(M_k^{-1}+C_k'W_k^{-1}C_k)^{-1}C_k'W_k^{-1}C_k[A_{k-1}X'(k-1)\boldsymbol{C}_{k-1}'\boldsymbol{Y}_{k-1}^{-1}\boldsymbol{C}_{k-1}X(k-1)A_{k-1}'-X_k]\\&=M_k+(M_k^{-1}+C_k'W_k^{-1}C_k)^{-1}C_k'W_k^{-1}C_k[A_{k-1}(X_{k-1}-P_{k-1})A_{k-1}'-X_k]\\&=M_k-(M_k^{-1}+C_k'W_k^{-1}C_k)^{-1}C_k'W_k^{-1}C_kM_k\\&=(M_k^{-1}+C_k'W_k^{-1}C_k)^{-1}[(M_k^{-1}+C_k'W_k^{-1}C_k)M_k-C_k'W_k^{-1}C_kM_k]\\&=(M_k^{-1}+C_k'W_k^{-1}C_k)^{-1}\end{aligned} \tag{3.124}$$

となる．かくして，漸化式

$$\left.\begin{aligned}P_k&=(M_k^{-1}+C_k'W_k^{-1}C_k)^{-1}\\M_k&=A_{k-1}P_{k-1}A_{k-1}'+B_{k-1}U_{k-1}B_{k-1}'\end{aligned}\right\} \tag{3.125}$$

が求まった．

次に，最小二乗推定量 $\hat{\boldsymbol{x}}_k$ の漸化式を導こう．そのために，式 (3.121)～(3.125) から

$$X'(k)\boldsymbol{C}_k'\boldsymbol{Y}_k^{-1}=[(I-P_kC_k'W_k^{-1}C_k)A_{k-1}X'(k-1)\boldsymbol{C}_{k-1}'\boldsymbol{Y}_{k-1}^{-1},\ \ P_kC_k'W_k^{-1}] \tag{3.126}$$

と表わされることに注意すれば，

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}_k&=\bar{\boldsymbol{x}}_k+X'(k)\boldsymbol{C}_k'\boldsymbol{Y}_k^{-1}\{\boldsymbol{y}_{[0,k]}-\bar{\boldsymbol{y}}_{[0,k]}\}\\&=A_{k-1}\bar{\boldsymbol{x}}_{k-1}+B_{k-1}\bar{\boldsymbol{u}}_{k-1}\\&\quad+(I-P_kC_k'W_k^{-1}C_k)A_{k-1}X'(k-1)\boldsymbol{C}_{k-1}'\boldsymbol{Y}_{k-1}^{-1}\{\boldsymbol{y}_{[0,k-1]}-\bar{\boldsymbol{y}}_{[0,k-1]}\}\\&\quad+P_kC_k'W_k^{-1}\{\boldsymbol{y}_k-\bar{\boldsymbol{y}}_k\}\\&=A_{k-1}\bar{\boldsymbol{x}}_{k-1}+B_{k-1}\bar{\boldsymbol{u}}_{k-1}\\&\quad+(I-P_kC_k'W_k^{-1}C_k)A_{k-1}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}-\bar{\boldsymbol{x}}_{k-1})\\&\quad+P_kC_k'W_k^{-1}\{\boldsymbol{y}_k-C_k(A_{k-1}\bar{\boldsymbol{x}}_{k-1}+B_{k-1}\bar{\boldsymbol{u}}_{k-1})-\bar{\boldsymbol{w}}_k\}\\&=A_{k-1}\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}+B_{k-1}\bar{\boldsymbol{u}}_{k-1}\\&\quad+P_kC_k'W_k^{-1}[\boldsymbol{y}_k-\{C_k(A_{k-1}\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}+B_{k-1}\bar{\boldsymbol{u}}_{k-1})+\bar{\boldsymbol{w}}_k\}]\end{aligned} \tag{3.127}$$

となることがわかる．かくして，漸化式

$$\left.\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}_k&=\tilde{\boldsymbol{x}}_k+P_kC_k'W_k^{-1}\{\boldsymbol{y}_k-(C_k\tilde{\boldsymbol{x}}_k+\bar{\boldsymbol{w}}_k)\}\\\tilde{\boldsymbol{x}}_k&=A_{k-1}\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}+B_{k-1}\bar{\boldsymbol{u}}_{k-1}\end{aligned}\right\} \tag{3.128}$$

が求まった．

式 (3.125) と (3.128) は式 (3.96) と (3.97) に全く等しいので，次の結果が示されたことになる．

> **定理 3.10**　信号過程 (3.75) と測定過程 (3.80) について，測定値 $\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_k$ が得られたときの信号 $\boldsymbol{x}_k$ の最小二乗推定量は式 (3.96) と (3.97) のように与えられる．そして，式 (3.110) は式 (3.96) と (3.97) に等価である．

3.4 カルマン・フィルターの性質

信号過程や測定過程に現われる雑音がたとえガウス性でなくても，誤差の二乗平均を最小にするという意味で最適な推定量が，式 (3.96) と (3.97) の漸化式で求まることが示された．このようにして導かれたカルマン・フィルターは図 3.5 のように構成され，フィルター過程は測定値 $\boldsymbol{y}_k$ を入力とし推定量 $\hat{\boldsymbol{x}}_k$ を出力とする線形ダイナミカルシステムとなっている．初期値は式 (3.98) のように与えられるが，$\bar{\boldsymbol{x}}_0$ と X_0 は必ずしも厳密な値を必要とするのではなく，実用的にはそれらのおおよその値で代用してもよいのである．というのは，時間がじゅうぶん経過して k が大となれば，普通の場合，$\hat{\boldsymbol{x}}_k$ や P_k に対する $\bar{\boldsymbol{x}}_0$ や X_0 の影響が小さくなってくるのである．このことを厳密に証明するのは一般には困難であるが，信号過程と測定過程とが定常な場合，あるいはある意味で十分定常に近い場合には，比較的簡単に証明できる (5.2 節参照)．

誤差の分散 P_k は k の増加につれて小さくなるとは限らない．式 (3.74) に対応する性質は，この場合，不等式

$$P_k \leqq M_k \tag{3.129}$$

である．ここに M_k は式 (3.97) あるいは (3.128) で定義された $\tilde{\boldsymbol{x}}_k$ と信号 $\boldsymbol{x}_k$ との差の分散である．実際，$\boldsymbol{u}_{k-1}$ は $\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}$ と $\boldsymbol{x}_{k-1}$ に独立なので，

$$\begin{aligned}&E(\tilde{\boldsymbol{x}}_k-\boldsymbol{x}_k)(\tilde{\boldsymbol{x}}_k-\boldsymbol{x}_k)'\\&\quad=E[A_{k-1}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}-\boldsymbol{x}_{k-1})-B_{k-1}(\boldsymbol{u}_{k-1}-\bar{\boldsymbol{u}}_{k-1})][A_{k-1}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}-\boldsymbol{x}_{k-1})-B_{k-1}(\boldsymbol{u}_{k-1}-\bar{\boldsymbol{u}}_{k-1})]'\\&\quad=A_{k-1}E(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}-\boldsymbol{x}_{k-1})(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}-\boldsymbol{x}_{k-1})'A_{k-1}'\\&\qquad+B_{k-1}E(\boldsymbol{u}_{k-1}-\bar{\boldsymbol{u}}_{k-1})(\boldsymbol{u}_{k-1}-\bar{\boldsymbol{u}}_{k-1})'B_{k-1}'\\&\quad=A_{k-1}P_{k-1}A_{k-1}'+B_{k-1}U_{k-1}B_{k-1}'\end{aligned} \tag{3.130}$$

となる．明らかに $\tilde{\boldsymbol{x}}_k$ は測定値 $\boldsymbol{y}_k$ を得る前の $\boldsymbol{x}_k$ の最適推定量であり，$\hat{\boldsymbol{x}}_k$ は $\boldsymbol{y}_k$ を測定した後の $\boldsymbol{x}_k$ の最適推定量である．したがって，式 (3.129) は誤差の二乗平均が測定によって大きくなることはないことを示している．

最小二乗推定量 $\hat{\boldsymbol{x}}_k$ と誤差 $\boldsymbol{e}_k$ との間の無相関性はこの場合にも成り立つ．このことは実際に式 (3.62)～(3.64) を真似て示すこともできるが，途中の計算はかなり面倒になる．したがって，ここでは別の観点から，r.m.s. 規範のもとでは $\hat{\boldsymbol{x}}_k$ と $\boldsymbol{e}_k$ との間の無相関性が本質的な必要条件であることを示そう．

後で述べるように，一般性を失わないので，簡単のために $\bar{\boldsymbol{x}}_0=0$, $\bar{\boldsymbol{u}}_k=0$, $\bar{\boldsymbol{w}}_k=0$ と仮定する．任意に n 次元定数ベクトル $\boldsymbol{a}$ を選び，平均値がゼロで分散行列が有限な n 次元確率ベクトル $\boldsymbol{x}$ との内積 $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{x}$ を作り，このような確率変数 $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{x}$ の全体集合 $\mathscr{X}$ を考えよう．そして，$\mathscr{X}$ の任意の二つの元 $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{x}_2$ との間に次のように内積を定義する．

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{a}'\boldsymbol{x}_2)&=\boldsymbol{a}'E\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2'\boldsymbol{a}\\&=E\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}'\boldsymbol{x}_2\end{aligned} \tag{3.131}$$

このとき，$\mathscr{X}$ は内積空間となり，また，任意の元 $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{x}$ のノルムを $\|\boldsymbol{a}'\boldsymbol{x}\|=|(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{a}'\boldsymbol{x})|^{1/2}$