の最適解の下界値となり，問題Pをさらに子問題に分割する必要はない．また(b)は，性質(i)のように子問題の目的関数値が親問題のそれより大きくないから，現在得られている実行可能解より良い解が問題の分割によって得られないことによる．(c)は自明であろう．

上の(a)，(b)，(c)の判定基準のように，緩和問題に対する最適解あるいは目的関数値を用いて原問題の最適解の上界値あるいは下界値を設定する操作を**限定操作**という．また上の(a)，(b)，(c)のように，限定操作を用いて，問題をそれ以上分割する必要がないと判定するとき，その問題に対応する樹枝構造図の頂点は**測深**されたという．測深された頂点に対応する問題に対してはそれ以上の分枝操作は実施されない．

現在(計算途中の任意の時点)までに得られている最良(目的関数値が最も大きい)の実行可能解を**現在解**という．分枝限定法においては次々と現在解を改良しながら，限定操作によって得られる目的関数値の上界値により近い実行可能解が求められていく．最終的には樹枝構造図の末端にある問題に対応するすべての頂点が測深されたところで分枝限定法は終了する．この時点で得られている現在解が原問題の最適解となる．以下の分枝限定法アルゴリズムにおいて，樹枝構造図の末端にある問題の集合を T，すべての非負整数値の集合を Z と表す．

分枝限定法アルゴリズム

ステップ1　$T=\{P_0\}$，$z^c=+\infty$，$i=0$.

ステップ2　$T=\phi$ かつ $z^c \neq -\infty$ ならば，対応する現在解が原問題 P_0 の最適解となるので，終了．そうでなければ，ステップ3へ行く．

ステップ3　$P_k \in T$ なる問題 P_k を選ぶ．P_k の連続型緩和問題 $P_k{}^r$ を解く．緩和問題 $P_k{}^r$ が実行不能ならば，問題 P_k は測深されたので，$T=T-\{P_k\}$ として，ステップ2へ戻る．そうでなければ，問題 $P_k{}^r$ に対する最適解を $\{x_{kj}{}^r \mid j\in N\}$，目的関数値を $z_k{}^r$ とする．

ステップ4　$z_k{}^r \leqq z^c$ ならば，問題 $P_k{}^r$ は測深されたので，$T=T-\{P_k\}$ としてステップ2へ戻る．そうでなければ，以下の(i)，(ii)を実行してステップ2へ戻る．

(i)　最適解 $\{x_{kj}{}^r \mid j\in N\}$ が原問題の実行可能解ならば，現在解を $x_j{}^c=x_{kj}{}^r$，$j\in N$，$z^c=z_k{}^r$ と修正する．$T=T-\{P_k\}$ とする．

(ii)　ある $j\in N$ に対して $x_{kj}{}^r \notin Z$ ならば，整数変数 $x_{kj}{}^r$ に対して分枝操作を実行し，子問題をそれぞれ P_{i+1}，P_{i+2} とする．$T=T\cup\{P_{i+1}, P_{i+2}\}-\{P_k\}$，$i=i+2$ とする．

上のアルゴリズムにおいて，ステップ2はこれ以上子問題に分割するような問題が存在しない場合あるいはすべての子問題が測深されている場合は，現在解が原問題の最適解であることを表す．ステップ3は，緩和問題が実行不能の場合は元の問題は測深され，緩和問題が実行可能の場合は対応する目的関数値が原問題の目的関数値の下界値を与えることを意味する．ステップ4は，ステップ3で得られた最適解をもとにして(i)が現在解の修正，(ii)はさらに分枝操作を行うことに相当する．ステップ3の問題 P_k を選ぶ場合には，以下のような選択基準が考えられる．

(a)　T に含まれる問題の中で，できるだけ上界値(連続型緩和問題の最適解に対応する目的関数値)が大きいものを選ぶ．

(b)　T に含まれる問題の中で，最も新しく T に入った問題を選ぶ．

基準(a)は**上界値優先基準**である．基準(b)は樹枝構造図においてできるだけ深く探索することを優先することから**深さ優先基準**と呼ばれる．上のような基準を用いて分枝限定法をより効率的かつ有効に，そしてまた速やかに実行できる．

分枝限定法アルゴリズムを以下に示す全整数計画問題に適用してみよう．

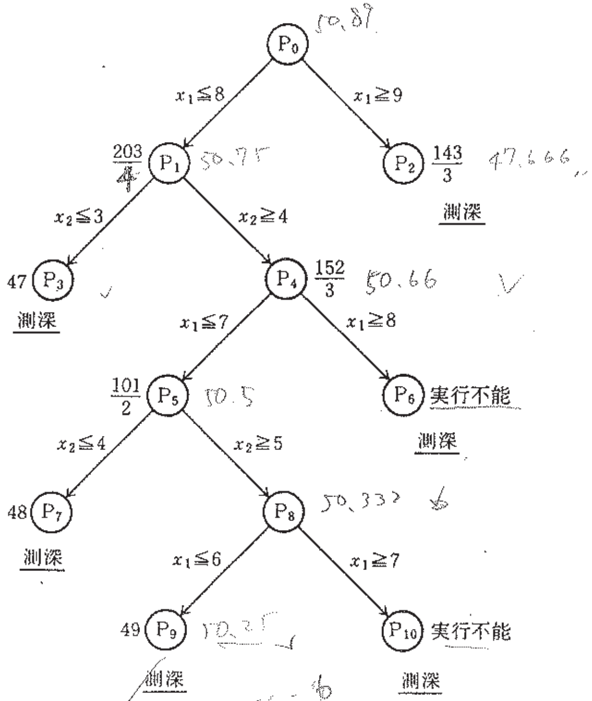

図9　分枝限定法の概略

49

50.0

x2≧6

7

50.0

49.6

問題 P_0：　Maximize　$4x_1+5x_2$　(35)

subject to　$7x_1+3x_2 \leqq 70$　(36 a)

$3x_1+4x_2 \leqq 39$　(36 b)

$5x_1+8x_2 \leqq 75$　(36 c)

$x_1,\ x_2 \geqq 0,$　整数　(36 d)

上のアルゴリズムの計算手順に基づくと，図9に示すような樹枝構造図が得られる．図中の枝上の不等式は，分枝操作において追加される制約条件を表す．また頂点上の数値は，対応する連続型緩和問題の最適解の目的関数値を表す．すべての頂点が測深されたときに分枝限定法は終了し，原問題の最適解は終了時における現在解として，以下のように与えられる．

$$x_1{}^*=6,\quad x_2{}^*=5,\quad z^*=49$$

(3)　Bendersの分割算法

p 個の連続型非負変数 $\{x_1,\ \cdots,\ x_p\}$ と q 個の非負整数変数 $\{z_1,\ \cdots,\ z_q\}$ を持つ混合型整数計画問題を次のように与える．

Maximize　$\boldsymbol{cx}+\boldsymbol{dz}$　(37)

subject to　$\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bz} \leqq \boldsymbol{b}$　(38 a)

$\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$　(38 b)

$\boldsymbol{z} \geqq \boldsymbol{0},$　整数変数ベクトル　(38 c)

$\boldsymbol{x}=(x_1,\ \cdots,\ x_p)^t$：$p$ 列ベクトル，$\boldsymbol{z}=(z_1,\ \cdots,\ z_q)^t$：$q$ 列ベクトル，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$：$m \times p$ 行列，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$：$m \times q$ 行列，$\boldsymbol{b}=(b_1,\ \cdots,\ b_m)^t$：$m$ 列ベクトル

整数変数ベクトル $\boldsymbol{z}$ を $\bar{\boldsymbol{z}}$ に固定すると，問題(37)-(38)は次のように書ける．

Maximize　$\boldsymbol{cx}+\boldsymbol{d\bar{z}}$　(39)

subject to　$\boldsymbol{Ax} \leqq \boldsymbol{b}-\boldsymbol{B\bar{z}}$　(40 a)

$\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$　(40 b)

したがって上の問題(39)-(40)の双対問題は，次のようになる．

Minimize　$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B\bar{z}})+\boldsymbol{d\bar{z}}$　(41)

subject to　$\boldsymbol{uA} \geqq \boldsymbol{c}$　(42 a)

$\boldsymbol{u} \geqq \boldsymbol{0}$　(42 b)

$\boldsymbol{u}=(u_1,\ \cdots,\ u_m)$：$m$ 行ベクトル

いま(42 a)，(42 b)で表される**凸多面体**を

$$P=\{\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{uA} \geqq \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{u} \geqq \boldsymbol{0}\} \qquad (43)$$

と表す．$\boldsymbol{uA} \geqq \boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{u} \geqq \boldsymbol{0}$ を満たす変数ベクトル $\boldsymbol{u}$ が存在しないとき $P=\phi$ となるので，問題(41)-(42)は実行不能となる．双対問題が実行不能のとき，主問題(39)-(40)そして元の主問題(37)-(38)は無限ケースとなる．一方 $P \neq \phi$ の場合，P が有界ならば P に含まれる任意の点は有限個の頂点(凸多面体の**端点**という) $\boldsymbol{\lambda}^1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\lambda}^s$ の1次結合として表される．また凸多面体 P が有界でなければ，$\boldsymbol{\mu A} \geqq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{\mu} \geqq \boldsymbol{0}$ を満たす方向(**錐線**) $\boldsymbol{\mu}^1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\mu}^t$ が存在し，ある錐線ベクトル $\boldsymbol{\mu}^j$ に対して

$$\boldsymbol{\mu}^j(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B\bar{z}})<0$$

ならば，問題(41)-(42)は下に非有界となる．このとき双対問題(41)-(42)が無限ケースであるから，主問題(39)-(40)と元の問題(37)-(38)は実行不能となる．したがって問題(37)-(38)が実行可能であるためには，次の関係が成立しなければならない．

$$\boldsymbol{\mu}^j(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B\bar{z}}) \geqq \boldsymbol{0} \qquad j \in T=\{1,\ \cdots,\ t\} \qquad (44)$$

一方，(44)が満たされていれば，問題(41)-(42)の最適解は凸多面体 P の有限個の頂点 $\boldsymbol{\lambda}^i$，$i \in S=\{1,\ \cdots,\ s\}$ のいずれかで得られる．したがって目的関数値は

$$\min_{i \in S} \boldsymbol{\lambda}^i(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B\bar{z}})+\boldsymbol{d\bar{z}} \qquad (45)$$

となり，元の問題(37)-(38)は未知変数を w，$\boldsymbol{z}$ とする次の問題と等価となる．

Maximize　w　(46)

subject to　$w \leqq \boldsymbol{\lambda}^i(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{Bz})+\boldsymbol{dz}$　$i \in S$　(47 a)

$0 \leqq \boldsymbol{\mu}^j(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{Bz})$　$j \in T$　(47 b)

$\boldsymbol{z} \geqq \boldsymbol{0},$　整数変数ベクトル　(47 c)

上の問題の最適解を $\boldsymbol{z}^*$ とすると，$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}^*$ のときの問題(39)-(40)を解いて得られる最適解を $\boldsymbol{x}^*$ として，$(\boldsymbol{x}^*,\ \boldsymbol{z}^*)$ が元の問題の最適解となる．以上の議論に基づく混合型整数計画問題の解法アルゴリズムは一般に**Bendersの分割算法**と呼ばれる．

Bendersの分割算法アルゴリズム

めを与える．

ステップ1　整数値ベクトル $\boldsymbol{z}=\bar{\boldsymbol{z}} \geqq \boldsymbol{0}$ を与える．$I=\phi$，$i=1$，$J=\phi$，$j=1$，$w=+\infty$．

ステップ2　Minimize　$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B\bar{z}})+\boldsymbol{d\bar{z}}$　(48)

subject to　$\boldsymbol{uA} \geqq \boldsymbol{c}$　(49 a)

$\boldsymbol{u} \geqq \boldsymbol{0}$　(49 b) step2

上の問題(48)-(49)を解くと，次のいずれかとなる．

(a) 最適解 $\boldsymbol{u}^i$ と対応する目的関数値 $\bar{w}$ が得られる．

(b) 無限ケースとなり，$\boldsymbol{v}^j\boldsymbol{A} \geqq \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{v}^j \geqq \boldsymbol{0}$．

(c) 実行不能．

(a)のとき，$\bar{w}=w$ ならば $\boldsymbol{z}^*=\bar{\boldsymbol{z}}$ として，双対問題(41)-(42)，主問題(39)-(40)の最適解 $\boldsymbol{x}^*$ と合わせて，$(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{z}^*)$ が原問題の最適解となるので，$\boxed{\text{終了}}$．$\bar{w}>w$ のとき，$I=I\cup\{i\}$，$i=i+1$ として，ステップ3へ行く．(b)のとき，$J=J\cup\{j\}$，$j=j+1$ としてステップ3へ行く．(c)のとき，元の問題は無限ケースか実行不能となるので，終了．

<u>ステップ3</u>

$$\begin{array}{lllr} \text{Maximize} & w & & (50) \\ \text{subject to} & w \leqq \boldsymbol{u}^p(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{z})+\boldsymbol{d}\boldsymbol{z} & p\in I & (51\,\mathrm{a}) \\ & 0 \leqq \boldsymbol{v}^q(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{z}) & q\in J & (51\,\mathrm{b}) \\ & \boldsymbol{z}\geqq \boldsymbol{0}, \quad \text{整数変数ベクトル} & & (51\,\mathrm{c}) \end{array}$$

上の問題(50)-(51)を解くと，次のいずれかとなる．

(a) 最適解 $(w^*, \boldsymbol{z}^*)$ が得られる．

(b) 実行不能．

(a)ならば，$\bar{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{z}^*$ としてステップ2へ行く．(b)ならば，元の問題も実行不能となるので，終了．

Bendersの分割算法の適用例を示そう．x_1，x_2，x_3 を非負実数変数，z_1，z_2 を0-1型整数変数とする次のような混合型整数計画問題を考える．

$$\begin{array}{llr} \text{Maximize} & -8x_1+3x_2+6x_3+z_1+5z_2 & (52) \\ \text{subject to} & 3x_1+2x_2-4x_3+2z_1+6z_2 \leqq 10 & (53\,\mathrm{a}) \\ & -2x_1+x_2+3x_3+5z_1+z_2 \leqq 7 & (53\,\mathrm{b}) \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geqq 0 & (53\,\mathrm{c}) \\ & z_1,\ z_2 \in \{0,\ 1\} & (53\,\mathrm{d}) \end{array}$$

初期整数解 $\bar{z}=(0,\ 0)$ に対応する問題(48)-(49)を与える．

$$\begin{array}{llr} \text{Minimize} & 10u_1+7u_2 & (54) \\ \text{subject to} & 3u_1-2u_2 \geqq -8 & (55\,\mathrm{a}) \\ & 2u_1+u_2 \geqq 3 & (55\,\mathrm{b}) \\ & -4u_1+3u_2 \geqq 6 & (55\,\mathrm{c}) \\ & u_1,\ u_2 \geqq 0 & (55\,\mathrm{d}) \end{array}$$

したがって，上の問題(54)-(55)の最適解 $(\boldsymbol{u}^1, \bar{w})$ は次のように得られる．

$$\boldsymbol{u}^1=\left(\frac{3}{10},\ \frac{12}{5}\right), \qquad \bar{w}=\frac{99}{5}$$

このときステップ3の問題(50)-(51)は次のように書くことができる．

$\boldsymbol{b}=(10, 7)$ $\quad \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{b}=\left(\frac{3}{10}, \frac{12}{5}\right)\begin{pmatrix}10\\7\end{pmatrix}=\frac{99}{5}$

$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 6\\5 & 1\end{pmatrix}$ $\quad \boldsymbol{u}\boldsymbol{B}\boldsymbol{z}=\left(\frac{3}{10}, \frac{12}{5}\right)\begin{pmatrix}2z_1+6z_2\\5z_1+z_2\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{5}(63z_1+21z_2)$

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & w \\ \text{subject to} & w \leqq \dfrac{99}{5}-\dfrac{58}{5}z_1+\dfrac{4}{5}z_2 \\ & z_1,\ z_2 \in \{0,\ 1\} \end{array}$$

$\boldsymbol{d}=(1, 5)$ $\quad \boldsymbol{d}\boldsymbol{z}=(z_1+5z_2)$

したがって，上の問題の最適解 $(\boldsymbol{z}^*, w^*)$ は次のように与えられる．

$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{z})+\boldsymbol{d}\boldsymbol{z}$
$=\boldsymbol{u}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{u}\boldsymbol{B}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{d}\boldsymbol{z}$
$=\frac{99}{5}-\frac{58}{5}z_1+\frac{4}{5}z_2$

$$\boldsymbol{z}^*=(0,\ 1), \qquad w^*=\frac{103}{5}$$

上の整数解に基づいて再びステップ2の問題(48)-(49)を設定する．

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & 4u_1+6u_2+5 \\ \text{subject to} & 3u_1-2u_2 \geqq -8 \\ & 2u_1+u_2 \geqq 3 \\ & -4u_1+3u_2 \geqq 6 \\ & u_1,\ u_2 \geqq 0 \end{array}$$

$z_1=0 \quad z_2=1$

$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{z})+\boldsymbol{d}\boldsymbol{z}$

$=\boldsymbol{u}\begin{pmatrix}10 & -6\\7 & 1\end{pmatrix}+5$

$=\boldsymbol{u}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}+5$

上の問題の最適解 $\boldsymbol{u}^2$ は，問題(54)-(55)の場合の最適解 $\boldsymbol{u}^1$ と同様に与えられ，さらに $w^*=\bar{w}$ となるので，最適解の整数部分が $\boldsymbol{z}^*=(0,\ 1)$ のように得られる．このとき $\bar{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{z}^*$ として問題(39)-(40)を解くと，最適解が $\boldsymbol{x}^*=(0,\ 18/5,\ 4/5)$ となる．以上から，混合型整数計画問題(52)-(53)の最適解は，次のように与えられる．

$$x_1^*=0, \qquad x_2^*=\frac{18}{5}, \qquad x_3^*=\frac{4}{5}$$

$$z_1^*=0, \qquad z_2^*=1$$

Bendersの分割算法が有限回の反復で最適解に到達することを示そう．まず凸多面体 P の端点 $\boldsymbol{u}^p$，$p\in I$ を含む問題(50)-(51)の最適解が $(w^*, \boldsymbol{z}^*)$ であることから，

$$\begin{aligned} w^* &= \min_{p\in I}\{\boldsymbol{u}^p(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{z}^*)+\boldsymbol{d}\boldsymbol{z}^*\} \\ &= \boldsymbol{u}^k(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{z}^*)+\boldsymbol{d}\boldsymbol{z}^* \end{aligned} \tag{56}$$

となる．したがって，次の関係が得られる．